<학술논문> **DOI https://doi.org/10.3795/KSME-B.2019.43.10.683** ISSN 1226-4881(Print)
2288-5234(Online)

위상차복원법의 등거리 변환 특성 연구

김세영*† · 박철훈* · 손영수* · 함상용* · 박찬훈*
* 한국기계연구원 로봇메카트로닉스연구실

Study on Isometry Characteristics of Phase Space Reconstruction

Seyoung Kim*†, Cheolhoon Park*, Youngsu Son*, Sangyong Ham* and Chanhun Park*
* Dept. of Robotics and Mechatronics, Korea Institute of Machinery & Materials (KIMM)

(Received April 24, 2019 ; Revised July 3, 2019 ; Accepted July 11, 2019)

Key Words: Phase Space Reconstruction(위상차복원법), Isometry(등거리 변환), Topological Transformation(토폴로지 변환), Mutual Information(상호 정보량), False Nearest Neighbor(허위 최근린지점 판별법)

초록: 본 연구는 위상차복원법의 매핑 특성을 등거리 변환 관점에서 고찰하기 위해 동역학 모델 시뮬레이션 기반으로 수행되었다. ***N***차원 동역학 시스템의 시간 응답 궤적을 위상차복원법을 이용하여 ***M***차원의 신호로 재구성할 때 임의의 서로 다른 두 지점 간 유클리드 거리가 어떻게 변화하는지 조사하였다. 먼저 시스템의 시변 상태값이 항상 끌개에 수렴하도록 선형 동역학 시스템(N=10)을 미분 방정식의 형태로 설계하였으며, 해당 끌개 위에 있는 임의의 두 지점 5,000쌍을 랜덤하게 선정한 후, 짝을 이룬 두 지점 간 유클리드 거리가 위상차복원 후에 달라지는 추이를 분석하였다. 결과적으로, 복원 전 상대적으로 가까운 거리에 놓여있는 두 지점은 복원 후에 가깝게 좁혀지거나 멀리 떨어질 수 있는 반면, 처음부터 멀리 떨어져 있는 두 지점은 복원 후에도 여전히 서로 먼 곳에 위치하는 경향을 보였다. 이는 시스템 응답 궤적 위의 상태 값들이 위상차복원되는 과정에서 적용받는 하나의 매핑 조건으로 이해할 수 있다.

Abstract: In this study, we examined the mapping characteristics of phase space reconstruction with a framework for isometry. First, linear dynamical systems (N = 10) were designed to have state attractors. Second, 5,000 pairs of arbitrary points on the state response were randomly selected, and then transformed into a delay-coordinate map using phase space reconstruction. Third, changes in the Euclidean distance between two arbitrary points were comparatively observed before and after phase space reconstruction. The results showed that far points remained far from each other even after phase space reconstruction, while the distance between near points can become closer or further apart. The results help provide a qualitative understanding of the mapping constraints of phase space reconstruction as one of the mapping characteristics.

1. 서 론

인체 또는 인공근육 등으로 이루어진 다관절 소프트 로봇의 경우 모델링이 어렵고, 관절의 회전 중심이 일정하지 않기 때문에 반복적인 모션의 규칙성(regularity) 등을 정량적으로 측정하기 어렵다. 이때, 위상차복원법(phase space reconstruction)을 활용하면 기존 시스템의 상태값과 위상동형 관계인 응답 궤적을 효과적으로 재현할 수 있으며, 이렇게 복원된 궤적을 분석함으로써 원래 시스템 응답의 규칙성을 간접적으로 파악할 수 있게 된다.[1,2] 이는 위상차복원법이 갖는 가장 큰 장점이라 할 수 있다.

위상차복원법은 동역학 시스템($\mathbb{R}^N$)의 상태값이 주기성을 가질 때, 즉 끌개(attractor)를 형성하는 경우 이를 1차원적으로 관찰한 시간 응답 데이터(single time series)를 토대로 ***M***차원의 위상동형(homeomorphic) 신호로 재구성하는 수학적 기법이다(Fig. 1).[3,4] 여기서 위상동형이란 간단히 말해 외

† Corresponding Author, seyoungkim@kimm.re.kr
ⓒ 2019 The Korean Society of Mechanical Engineers

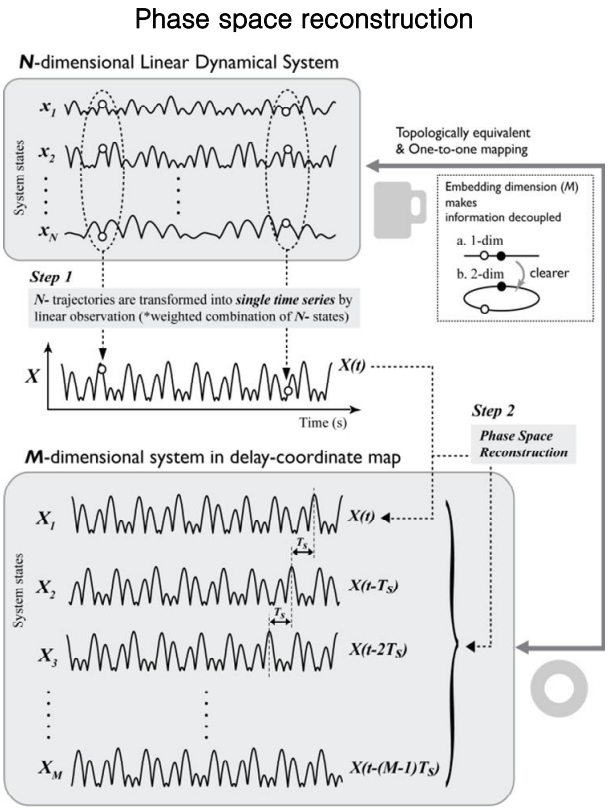

Fig. 1 Phase space reconstruction from ***N***-dimensional dynamical system to ***M***-dimensional system in delay coordinate map. ***N***-state trajectories were observed as a single time series (step 1), then transformed into a set of ***M*** numbers of time delayed trajectories (step 2). After the phase space reconstruction, the original system is topologically equivalent with the newly transformed system

관은 다르지만 본질적인 구조는 동일한 형태를 의미하며, 위상동형 신호로 복원할 때 양방향 연속인 일대일 대응 조건을 만족하기 때문에 매핑(mapping) 되기 전과 후의 응답 궤적이 갖는 내재된 규칙성은 동일하다. 기존 연구는 이러한 장점을 최대한 활용하는 관점에서, 주로 위상차복원법의 수학적 증명이나 복원된 신호의 분석 및 활용 방안 등에 초점을 맞추었지만, 위상차복원법 자체의 매핑 특성에 관한 논의는 그리 활발하게 진행되지 않았다.[2,5~10]

이에 본 연구에서는 위상차복원법이 갖는 매핑 특성에 대해 일면 직관적으로 이해할 수 있도록 등거리 변환(isometry) 개념을 도입하여 실험 프로토콜을 수립하였다. 즉, ***N*** 차원 동역학 시스템의 응답 궤적을 위상차복원법을 이용하여 ***M*** 차원의 신호로 재구성할 때 임의의 두 지점 간 거리가 복원 후 어떻게 변화하는지 조사하였다. 이를 위해, 동역학 시스템의 시간 응답 궤적, 즉 끌개 위에 있는 임의의 두 지점 5,000쌍을 랜덤하게 선정한 후 위상차복원 전과 후의 두 지점 간 유클리드 거리(Euclidean distance)를 각각 계산하였으며, 짝을 이룬 두 지점 사이의 거리 변화율을 등거리 변환 특성치(Q)로 정의한 후 복원 전 거리에 따른 변화 추이를 분석하였다.

2. 실험 및 해석 방법

2.1 동역학 모델

주기성을 갖는 시간 응답 궤적을 재현하기 위해 초기값에 관계없이 시스템의 시변 상태값이 항상 끌개(attractor)에 수렴하는 동역학 시스템(N=10)을 미분 방정식의 형태로 설계하였다(식 (1)).[1,8] 본 연구에 사용된 동역학 모델(식 (1)) 및 관련 수식(식 (2)와 (3)) 등은 본 저널에 기 발표된 선행 논문과의 일관성을 위해 동일하게 표현하였다.[1]

$$\dot{x}(t) = \Psi(x(t)),$$
$$where \;\; x(t) \in \mathbb{R}^6, \;\; \Psi : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6 \qquad (1)$$

동역학 시스템의 시스템 행렬($\Psi \in \mathbb{R}^{6\times 6}$)은 주어진 고유값($\lambda_{1\sim6}$)과 고유벡터($v_{1\sim6}$)로부터 고유치 분해(eigen decomposition) 방식을 적용 간단한 행렬 연산을 통해 계산하였다(식 (2)). 각 개별 동역학 시스템마다, 고유값은 임의의 순허수 세 쌍의 켤레 복소수(i.e., $\lambda_{1,3,5} = -\lambda_{2,4,6}$)로, 고유벡터는 임의의 켤레 복소행렬(i.e., $v_{1,3,5} = \overline{v_{2,4,6}}$)로 랜덤하게 부여되었는데, 이때, 만약 임의의 복소행렬 대신 정준기저 벡터(canonical basis vector)를 시스템의 고유벡터로 활용하면 상대적으로 주기성 관찰이 용이한 정렬된 형태의 시간 응답 궤적 또는 끌개를 생성할 수 있다.[1,8]

$$\Psi = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_6 \end{bmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_6 \end{bmatrix}^{-1}}_{\mathbf{V}^{-1}} \qquad (2)$$

상태공간방정식(state space equation) 형태로 설계된 개별 동역학 시스템의 시변 상태값 시뮬레이션은 선형 시스템용 시간 응답 함수를 이용하여 수행하였으며(lsim, MATLAB®), 시뮬레이션 초기값으로는 $x_0 = \mathbf{V}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$ 을 사용하였다(Fig. 2(a)). 또한, 시뮬레이션 상태값 측정 시 노이즈(measurement noise)가 전혀 수반되지 않는 이상적인 상황임을 가정하였다(Fig. 2(b)).

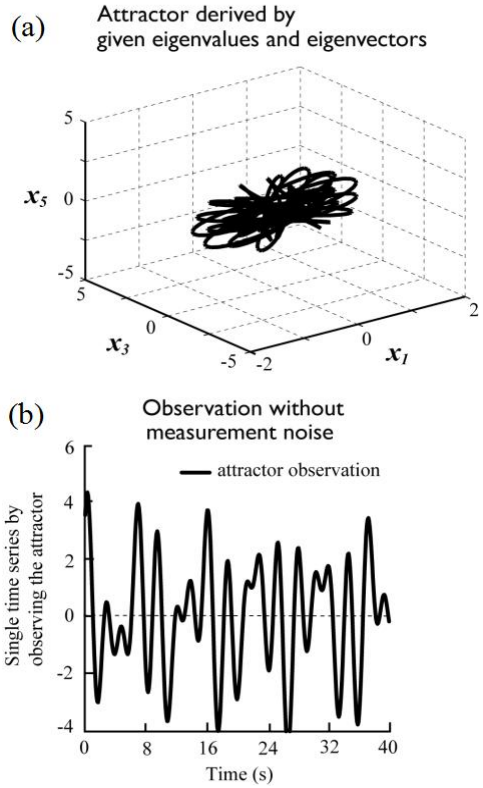

Fig. 2 (a) Example of an attractor (with x_1, x_3, x_5) of linear dynamical system ($\mathbb{R}^6$) with given eigenvalues ($\lambda_{1,2}$ = ±2.7348j, $\lambda_{3,4}$ = ±2.0258j, $\lambda_{5,6}$ = ±0.8103j) and eigenvectors (v_1 = [-0.2458 - 0.0103j, -0.1595+0.1100j, -0.1539-0.6602j, 0.4105 + 0.1697j, -0.0897 + 0.0579j, -0.4541-0.1659j]^T, v_2 = conj(v_1), v_3 = [-0.0997 + 0.3148j, -0.4430 + 0.3420j, -0.1901 - 0.1226j, 0.4060 - 0.0785j, 0.4637 + 0.2558j, -0.2113 + 0.1749j]^T, v_4 = conj(v_3), v_5 = [-0.2371 + 0.1307j, -0.0818 + 0.0317j, -0.2442 + 0.2861j, 0.3375 + 0.0309j, 0.2296-0.5791j, 0.4147-0.3202j]^T, v_6 = conj(v_5)). (b) Single time series observed from the example dynamical system shown in (a). The single time series is simply summed from six state trajectories (x_1~x_6) of the linear dynamical system, without measurement noise

2.2 토폴로지 변환을 통한 위상차복원

동역학 시스템의 시간 응답 궤적을 토폴로지 변환(위상변환, topological transformation)하기 위해 관측 행렬(h)과 시간 지연 행렬(Φ)이 포함된 위상차복원(phase space reconstruction) 맵($F: \mathbb{R}^{N=6} \rightarrow \mathbb{R}^M$)을 구성하였다(식 (3)).[8]

$$F(x(t)) = [h^T x(t) \mid h^T x(t-T_s) \mid \ldots \mid h^T x(t-(M-1)T_s)]$$
$$= [\underbrace{no\ delay}_{no\ delary} \mid \underbrace{h^T \Phi x(t)}_{1^{st}\ delay} \mid \ldots \mid \underbrace{h^T \Phi^{(M-1)} x(t)}_{(M-1)^{th}\ delay}]$$
$$where\ \ h = \sqrt{(2 \cdot d)/M} \cdot (c/|c|),\ \ \Phi = e^{-\Psi T_s} \qquad (3)$$

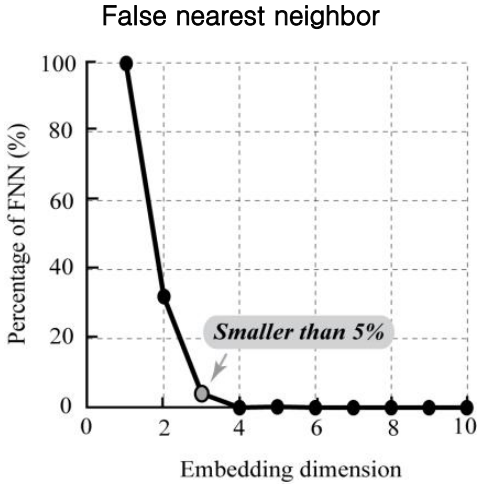

Fig. 3 False nearest neighbor (FNN) test to determine the embedding dimension (***M***) of delayed coordinate map to complete the phase space reconstruction. The third point, which is smaller than 5 %, is chosen as the embedding dimension ***M*** = 3

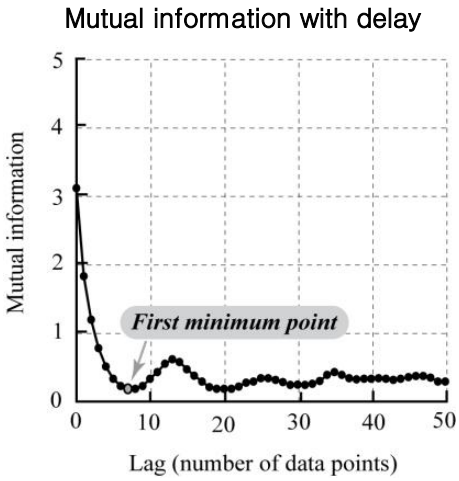

Fig. 4 Mutual information test to determine the sampling interval (= time delay; T_s) of the observed single time series (shown in Fig. 2(b)) to be used for phase space reconstruction. The first minimum point (lag = 7) is chosen as the sampling interval T_s = 7

위 식에서 관측 행렬(h) 내 d, M, c는 각각 시스템 고유값의 켤레 수(d=3), 허위 최근린지점 판별법(false nearest neighbor)을 통해 계산된 매립 차원수(Fig. 3),[7,10] 시스템의 상태값들을 동일한 가중치로 더해 하나의 시간 응답 궤적(single time series)으로 변환하는 기본 행렬($c = [1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]^T$)을 의미한다. 또한, 시간 지연 행렬(Φ) 내 Ψ, T_s는 각각 시스템 행렬(식 (1)) 및 상호 정보량[6,9] 산출 방식을 통해 계산된 시간 지연값(delayed sampling interval)(Fig. 4)을 나타낸다.

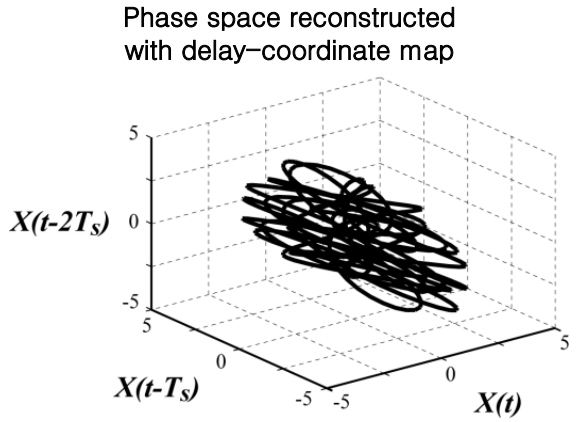

Fig. 5 Phase space trajectory reconstructed from the single time series (shown in Fig. 2(b)) by the time delay embedding. $X(t)$ and T_s indicate the single time series and sampling interval (= time delay or lag) calculated using the mutual information test (shown in Fig. 4), respectively, where the corresponding embedding dimension is $\boldsymbol{M}$ = 3 determined from the false nearest neighbor test (shown in Fig. 3)

2.3 등거리 변환 특성치

등거리 변환 특성치(Q)는 동역학 시스템의 시간 응답 궤적 위에 있는 임의의 두 점 사이의 거리가 토폴로지 변환, 즉 위상차복원 이후에 달라지는 상대치를 측정하는 지표로써, 위상차복원 전후 두 지점 사이의 유클리드 거리(Euclidean distance)비로 다음과 같이 정의된다(식 (4)).[8]

$$\mathrm{Q} = \frac{F\left(x\left(t_b\right)\right) - F\left(x\left(t_a\right)\right)_2^2}{x\left(t_b\right) - x\left(t_a\right)_2^2}$$

where t_a, t_b *are arbitrary* (4)

2.4 데이터 분석

앞서 정의된 등거리 변환 특성치(Q)를 기준으로 위상차복원법의 매핑(mapping) 특성에 대해 알아보고자 하였다. 이를 위해, 개별 동역학 시스템별로 시간 응답 궤적 위에 있는 5,000쌍의 포인트를 랜덤하게 선정한 후 토폴로지 변환 전 두 지점 사

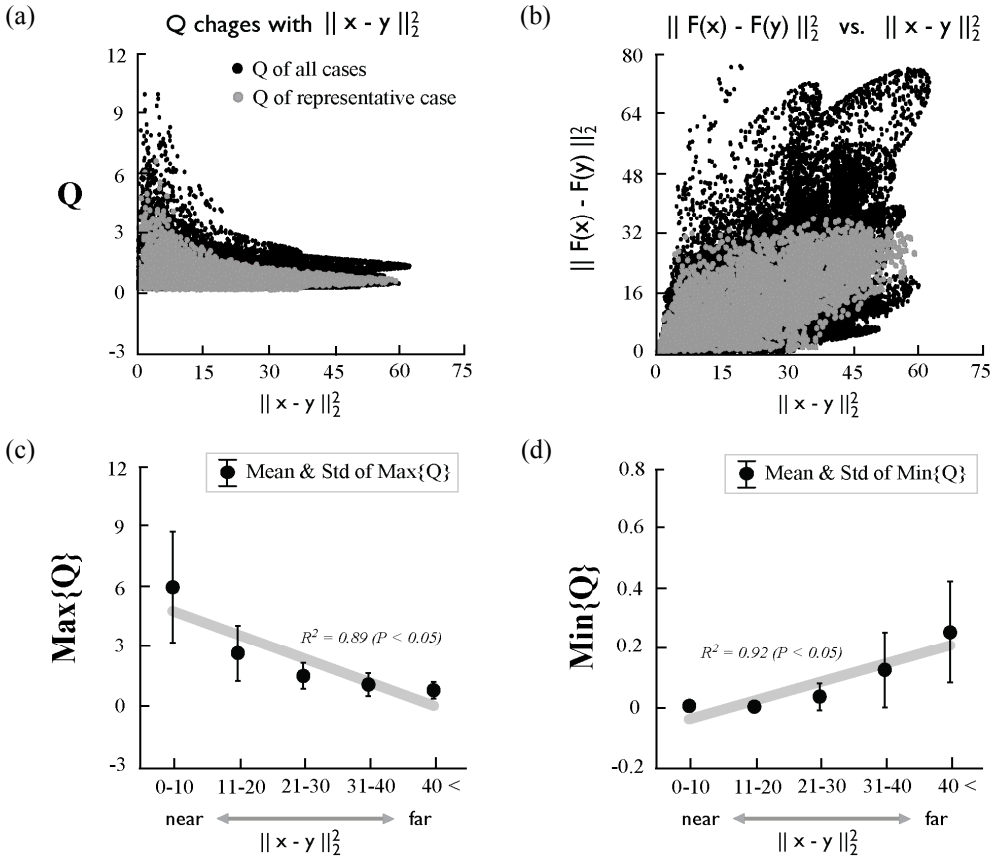

Fig. 6 (a) Isometry factor (Q) vs. Euclidean distance between two arbitrary points of x and y in the state response of each dynamical system (squared; $x - y_2^2$). (b) Euclidean distance between the two reconstructed points of $F(x)$ and $F(y)$ (squared; $F(x) - F(y)_2^2$) vs. Euclidean distance between two arbitrary points of x and y (squared; $x - y_2^2$). Averages and standard deviations of (c) maximum and (d) minimum values of isometry factor (Q), respectively, with increasing Euclidean distance between two arbitrary points of x and y

이의 유클리드 거리 대비 1) 등거리 변환 특성치, 2) 변환 후의 거리, 3) 등거리 변환 특성치의 최대값, 4) 등거리 변환 특성치의 최소값을 각각 계산하였다(Fig. 6). 이후, 변환 전 거리에 따른 등거리 변환 특성치의 최대값 및 최소값이 설계된 전체 시스템(N=10)에 걸쳐 통계적으로 유의미하게 변화하는지 살펴보기 위해 선형회귀분석법을 활용하였으며, 해당 데이터의 경향 분석 및 검증은 유의수준 $P<0.05$를 기준으로 수행하였다.

3. 결 과

3.1 위상차복원 전후의 응답 궤적

토폴로지 변환을 이용하여 위상차복원법을 수행하는 경우 매립 차원($M>3$)이 원래 동역학 시스템의 차원($\mathbb{R}^6$)과 일치하지 않기 때문에 변환 전후의 응답 궤적이 서로 위상동형임을 직관적으로 파악하기는 어렵다. 하지만, 이는 수학적으로 기 증명된 내용이며,[4,8,9] 본 연구의 시뮬레이션 결과에서도 시간 지연 좌표계(delayed coordinate map) 상에서 복원된 응답 궤적이 적어도 발산하지 않고 끌개를 형성하고 있는 것이 관찰되었다(Fig. 5). 또한, 2.1절에서 언급했듯, 정준 기저 벡터를 시스템의 고유벡터로 활용하는 경우 상대적으로 주기성 관찰이 용이한 정렬된 형태의 끌개를 생성하는 것을 확인하였다.

3.2 위상차복원 전후의 유클리드 거리 변화

위상차복원 전 동역학 시스템의 시간 응답 궤적 위에 있는 임의의 두 지점 간 유클리드 거리가 상대적으로 멀어질수록, 복원 후 계산된 등거리 변환 특성치(Q)가 일정한 값으로 수렴하는 경향을 보였다(Fig. 6(a)). 이는 위상차복원 전의 거리값을 X축, 복원 후의 거리값을 Y축에 표시한 그래프에서 X값이 증가할수록 X값과 Y값의 선형적 비례관계가 점차 뚜렷해지는 추세를 통해서도 정성적으로 확인할 수 있었다(Fig. 6(b)). 또한, 위와 관련된 통계분석 결과로는 위상차복원 전 두 지점 간의 거리가 증가함에 따라 등거리 변환 특성치의 최대값(Fig. 6(c))은 감소하고($P < 0.05$), 최소값(Fig. 6(d))은 증가하면서($P < 0.05$), 등거리 변환 특성치 값의 범위를 점차 좁혀가는 현상이 관찰되었다. 이때, 등거리 변환 특성치(Q)값은 기 발표된 논문에서와 같이 항상 0보다 큰 값을 나타냈으며, 이를 통해 위상차복원법의 양방향 연속인 일대일 대응 조건을 만족하였다.[1,8]

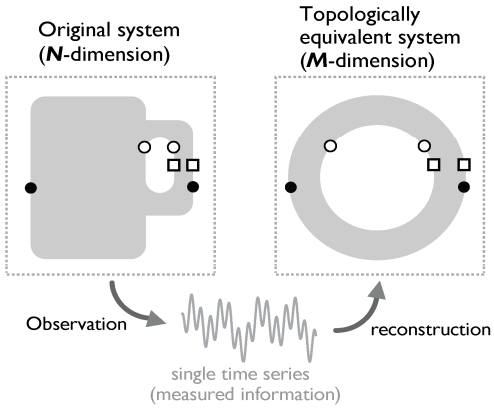

Fig. 7 Conceptual drawings of how euclidean distances between three pairs of near/far points change after the topological transformation

4. 고 찰

4.1 위상차복원법의 등거리 변환 특성

위상차복원 전후의 유클리드 거리 변화를 통해 위상차복원법의 매핑 특성을 정성적이지만, 직관적으로 이해할 수 있었다. 동역학 시스템의 시간 응답 궤적상에서 상대적으로 가까운 거리에 놓여있는 두 지점은 위상차복원 후 가깝게 좁혀지거나 멀리 떨어질 수 있는 반면, 처음부터 멀리 떨어져 있는 두 지점은 복원 후에도 여전히 서로 먼 곳에 위치하는 경향을 보인다. 선정된 매립 차원(M)에 따라 시스템의 차원이 달라질 수 있기에, 위상차복원 전후의 응답 궤적을 단순 비교할 수는 없지만, 유클리드 거리만을 기준으로 단순화시켜 컵과 도넛의 토폴로지 변환으로 도식화하면 보다 쉽게 이해할 수 있다(Fig. 7). 토폴로지 변환은 개념적으로 물체를 찢거나 붙이지 않고 구부리거나 늘이는 방식으로 위상동형의 다른 형태로 변형시키는 것을 의미하는데, 수학적으로는 본 연구의 위상차복원과 동일한 맥락이므로 예시와 같이 차용 가능하다(Fig. 7). 컵과 도넛은 본질적으로 도형 내부에 구멍이 한 개 있는 위상동형이기 때문에 매립 차원을 고려하지 않는다면, 토폴로지 변환을 통해 컵에서 도넛으로 위상차복원 되었다고 가정할 수 있다. 이때, 상대적으로 서로 인접한 거리의 두 점(흰색, Fig. 7)은 변환 후에 여전히 가깝게 위치하거나 반대로 멀어질 수 있지만, 처음부터 먼 거리의 두 점(검정색, Fig. 7)은 변환 후에도 여전히 멀리 떨어진 상태로 남게 된다. 이는 시스템 응답 궤적 위의 상태값들이 위상차복원되는 과정에서 적용받는 하나의 매핑 조건으로 이해할 수 있다.

본 매핑 조건은, 토폴로지 변환의 일대일, 역함수 포함 연속 함수 조건과 맞물려 생각해 볼 수

있다. 위상동형사상의 경우, 인접한 두 점은 변환 후에도 여전히 인접한 두 점으로 남기 때문에, 위상차복원 전 임의의 두 점 사이가 가까울수록 그 사이에 놓인 점들의 수가 상대적으로 적어 복원 후에 다양한 거리로 변환될 수 있다. 반대로 복원 전 두 지점 사이의 거리가 먼 경우, 그 사이에 인접 조건을 만족하며 놓여 있는 점들의 수가 많아 근거리로 변환될 가능성이 낮아진다.

4.2 위상차복원된 신호의 활용

위상차복원 전과 후의 응답 궤적은 서로 위상동형 관계이며 내재된 규칙성(regularity)이 동일하기 때문에, 유연한 재질로 구성되며, 모델링이 어렵고, 관절의 회전 중심이 일정하지 않은 다자유도 생체 또는 소프트 로봇의 반복적인 움직임을 분석하는데 이를 효과적으로 활용할 수 있다. 예를 들어, 생체의 반복적인 움직임을 측정한 1차원 시간 응답 데이터(예: 관절의 시변 가속도)를 위상차복원을 통해 해당 생체 시스템의 응답 궤적($\mathbb{R}^{N=unknown}$)과 위상동형인 $\boldsymbol{M}$차원의 궤적으로 변환한 후, 이를 반복정량분석법을 통해 분석함으로써 원래의 생체 움직임이 갖는 반복성을 간접적으로 평가할 수 있다.[2,5,11,12]

4.3 한계점

본 연구는 선형 시스템을 대상으로 위상차복원법 자체의 변환 특성 즉, 복원 전 근/원거리의 두 지점이 복원 후에 매핑되는 경향을 분석하였다. 측정 노이즈가 위상차복원 결과에 미치는 영향은 기존 선행 연구에서 발표하였으며,[1] 추후 비선형 시스템으로의 확장 등 보다 실제적인 시스템을 대상으로 하는 후속 연구가 진행될 수 있다.

후 기

본 연구는 한국기계연구원(KIMM) 기관주요사업의 지원을 받아 수행되었음.

참고문헌
(References)

(1) Kim, S., Park, C. and Kim, B., 2019, “Study on Phase Space Reconstruction for Biomechanical Data Analysis,” *Trans Korean Soc. Mech. Eng. B*, Vol. 43, No. 4, pp. 277~282.

(2) Zbilut, J. P., Thomasson, N. and Webber, C. L., 2002, “Recurrence Quantification Analysis as a Tool for Nonlinear Exploration of Nonstationary Cardiac Signals,” *Medical Engineering & Physics*, Vol. 24, No. 1, pp. 53~60.

(3) Eftekhari, A., Yap, H. L., Wakin, M. B. and Rozell, C. J., 2018, “Stabilizing Embedology: Geometry-preserving Delay-coordinate Maps,” *Physical Review E*, Vol. 97, No. 2, p. 022222.

(4) Packard, N. H., Crutchfield, J. P., Farmer, J. D. and Shaw, R. S., 1980, “Geometry from a Time Series,” *Physical Review Letters*, Vol. 45, No. 9, p. 712.

(5) Thiel, M., Romano, M. C. and Kurths, J., 2004, “How Much Information is Contained in a Recurrence Plot?,” *Physical Letters A*, Vol. 330, No. 5, pp. 343~349.

(6) England, S. A. and Granata, K. P., 2007. “The Influence of Gait Speed on Local Dynamic Stability of Walking,” *Gait & Posture*, Vol. 25, No. 2, pp. 172~178.

(7) Hasson, C. J., van Emmerik, R. E., Caldwell, G. E., Haddad, J. M., Gagnon, J. L. and Hamill, J., 2008, “Influence of Embedding Parameters and Noise in Center of Pressure Recurrence Quantification Analysis,” *Gait & Posture*, Vol. 27, No. 3, pp. 416~422.

(8) Yap, H. L. and Rozell, C. J., 2011, “Stable Takens’ Embeddings for Linear Dynamical Systems,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 59, No. 10, pp. 4781~4794.

(9) Fraser, A. M. and Swinney, H. L., 1986, “Independent Coordinates for Strange Attractors from Mutual Information,” *Physical Review A*, Vol. 33, No. 2, p. 1134.

(10) Hegger, R. and Kantz, H., 1999, “Improved False Nearest Neighbor Method to Detect Determinism in Time Series Data,” *Physical Review E*, Vol. 60, No. 4, pp. 4970~4973.

(11) Marwan, N., Romano, M. C., Thiel, M. and Kurths, J., 2007, “Recurrence Plots for the Analysis of Complex Systems,” *Physics Reports*, Vol. 438, No. 5, pp. 237~239.

(12) Labini, F. S., Meli, A., Ivanenko, Y. P. and Tufarelli, D., 2012, “Recurrence Quantification Analysis of Gait in Normal and Hypovestibular Subjects,” *Gait & Posture*, Vol. 35, No. 1, pp. 48~55.